TEMA 3: **GEOMETRÍA PROYECTIVA**

7. Espacios y subespacios proyectivos

El origen de la geometría proyectiva lo podemos atisbar en el descubrimiento de la perspectiva en el Renacimiento. Hasta entonces no se sabía cómo realizar representaciones planas realistas de escenas tridimensionales. Con el descubrimiento de la perspectiva en la pintura se logra representar en el plano escenas tridimensionales de forma realista. Los objetos y las distancias más lejanas se representan más pequeñas. Así, rectas que sabemos son paralelas, si se alejan hacia el horizonte, las representamos como coincidentes (por ejemplo, las vías de un tren: a medida que se alejan hacia el horizonte, las traviesas parecen cada vez más pequeñas y los dos rieles confluyen en un mismo punto). Si quieres saber más sobre el origen y la historia de la geometría proyectiva, puedes ver en algunas paredes de la Facultad una exposición confeccionada en 1999. También puedes acceder a ella en `http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html`.

La ciudad ideal "de Berlín", anónima, aprox. 1477 (Gemaldegalerie, Berlín).

Sin embargo hasta ahora nosotros habíamos hecho geometría plana en el plano afín (o en el plano afín euclídeo si consideramos ángulos y distancias, es decir, formas y medidas). Introduciremos el plano proyectivo a partir del plano afín, como *compleción* del mismo. Tomemos el plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y fijémonos en las rectas del plano. Si tomamos un par de rectas distintas pueden ocurrir dos cosas: que se corten o que no (en este segundo caso, son rectas paralelas). Intentemos imitar en el plano afín lo que nos dice la perspectiva. Consideramos como modelo del plano un papel sobre nuestra mesa, que imaginamos se prolonga en todas direcciones. Dibujemos ahora dos rectas paralelas en el papel. Imaginemos cómo se alejan las rectas al salir del papel y de la mesa; desde el lugar desde el que miramos nos parecería que las rectas, en la lejanía, se juntan en un punto del "horizonte", en el "infinito". Para expresar esto matemáticamente lo que tenemos que hacer es añadir al plano afín más puntos, los puntos del infinito y "decretar" que dos rectas paralelas se cortan en uno de esos nuevos puntos. Al añadir al plano afín esos puntos del infinito obtendremos el plano proyectivo.

Otra ejemplo de en qué sentido queremos cambiar (y quizá mejorar) las cosas con respecto a la geometría afín es el caso de una hipérbola (por ejemplo, la de ecuación $xy = 1$) y sus asíntotas: da la impresión de que si pudiéramos prolongar el dibujo "hasta el infinito" la rama de la hipérbola y la asíntota se encontrarían. Pues bien, una vez que "completemos" la hipérbola y sus asíntotas con sus "puntos del infinito" respectivos, eso es precisamente lo que ocurrirá. Así pues, la pregunta es: ¿cómo añadimos todos esos puntos del infinito al plano afín de forma que la construcción tenga sentido y que las cosas funcionen como queremos en los dos ejemplos anteriores?

Definición de plano proyectivo

Definición 7.1. *(primera definición plano proyectivo estándar)* El plano proyectivo estándar $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ es el conjunto de todas las rectas de $\mathbf{k}^3$ que pasan por el origen $(0,0,0)$ o lo que es lo mismo, considerando $\mathbf{k}^3$ como un espacio vectorial, el plano proyectivo es el conjunto de todas las rectas vectoriales de $\mathbf{k}^3$.

¿Por qué esto es un plano? Para ello podemos pensar en cómo funciona una cámara oscura, que quizá hayas fabricado alguna vez haciendo un pequeño agujero en un lado de una caja y sustituyendo el lado opuesto por un papel traslúcido. Las imágenes se proyectan en el papel traslúcido, que es una parte de un plano. Los "rayos" de luz entran por el agujero, que podemos pensar como el $(0,0,0)$ de $\mathbf{R}^3$. Los puntos del espacio (que una vez fijado el origen podemos identificar como vectores de $\mathbf{R}^3$) que están en el mismo rayo dan lugar a un único punto en la representación plana que hacemos del espacio tridimensional en el papel traslúcido; así, cada rayo se identifica con un punto del "plano". De acuerdo a este mismo principio funciona nuestro ojo, en el que nuestra pupila jugaría el papel del agujero de la cámara oscura y nuestra retina jugaría el papel de la pantalla de papel traslúcido. Piensa que si cerramos un ojo y miramos solo con el otro perdemos la sensación de profundidad, es decir, nuestro cerebro se queda con una representación plana del espacio. De hecho, la geometría proyectiva nos puede explicar por qué viendo con los dos ojos se puede reconstruir, a partir de dos representaciones planas, una imagen tridimensional.

Imitemos la construcción de la cámara oscura en nuestro modelo matemático. En $\mathbf{k}^3$, con coordenadas x, y, z consideramos el subconjunto de puntos que satisfacen la ecuación $z = 1$. Este subconjunto es un subespacio afín de dimensión 2, o sea, un plano afín Π dentro de $\mathbf{k}^3$. Cada recta vectorial, cada "rayo" corta en un único punto al plano Π. En realidad, eso no es del todo cierto; lo que sí es cierto es que si unimos un punto del plano Π y el origen determinamos una única recta vectorial, por lo que podemos interpretar el plano afín como un subconjunto del plano proyectivo. ¿Qué puntos se han añadido (recordemos que, con esta definición, los elementos, los puntos del plano proyectivo, son rectas vectoriales)? Los que corresponden a rectas que no cortan al plano Π; es decir, las rectas vectoriales paralelas al plano Π; es decir, las rectas vectoriales contenidas en la dirección de Π; es decir, las rectas vectoriales contenidas en el plano vectorial de ecuación $z = 0$.

Vemos lo que le ocurre en este modelo a un par de rectas distintas. En primer lugar vemos que una recta l del plano afín Π se corresponde con un plano vectorial (el formado por todos los rayos que pasan por $(0,0,0)$ y por cada uno de los puntos de l, a los que añadimos la recta vectorial dirección de l). Dos rectas l_1 y l_2 secantes en Π corresponden a dos planos vectoriales que se cortan en la recta vectorial que corresponde al punto de corte de l_1 y l_2. Dos rectas paralelas l_1 y l_2 corresponden a dos planos vectoriales que se cortan en la recta vectorial que es la dirección común de l_1 y l_2, por tanto podemos decir que l_1 y l_2 (o más bien, sus *completados*) se cortan en uno de los puntos que hemos añadido a Π para obtener el plano proyectivo. Como las rectas paralelas se supone que se cortan cuando nos alejamos mucho, en el "horizonte", en el "infinito", llamamos a los puntos que añadimos al plano afín los *puntos del infinito*. Veremos luego que estos puntos también forman una recta, lo cual es lógico, porque si a cada recta de Π le hacíamos corresponder un plano vectorial y así obteníamos todos los planos vectoriales de $\mathbf{k}^3$ menos uno, a ese plano vectorial que falta, que no es otro que el plano de ecuación $z = 0$, le haremos corresponder la recta de los puntos del infinito.

Como las rectas vectoriales solo se cortan en el $(0, 0, 0)$, si consideramos $\mathbf{k}^3 \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$, entonces las rectas vectoriales de $\mathbf{k}^3$ sin el $(0, 0, 0)$ nos proporcionan una partición de $\mathbf{k}^3 \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$. Por eso también podemos definir el plano proyectivo estándar sobre $\mathbf{k}$ como el cociente de $\mathbf{k}^3 \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$ por la relación de equivalencia asociada a esa partición:

Definición 7.2. *(segunda definición de plano proyectivo estándar)* En $\mathbf{k}^3 \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$, definida así: $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $(x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$. Definimos el plano proyectivo estándar $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ sobre el cuerpo $\mathbf{k}$ como el conjunto cociente de $\mathbf{k}^3 \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$ por la relación $\sim$.

Lo que estamos haciendo simplemente es decir que dos vectores no nulos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) de $\mathbf{k}^3$ son equivalentes si y solo si están en el mismo "rayo", es decir, en la misma recta vectorial. Para cada clase de equivalencia tomamos como representante (para visualizar el conjunto cociente como un plano) el punto del rayo que está en el plano Π. Si el rayo no corta al plano Π, pensamos esa clase de equivalencia como un punto del infinito.

La primera "mejora" que ofrece la geometría proyectiva sobre la geometría afín es el hecho de que dos rectas distintas del plano proyectivo siempre se cortan en un (y solo un) punto. Aunque no hayamos dado aún la definición formal de recta del plano proyectivo, por el momento aceptaremos que las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ son

- los "completados" $\bar{l}$ de las rectas l del plano afín Π, que obtenemos añadiendo a cada l un *punto del infinito* (a saber, la clase en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de un vector director de l); y
- la *recta del infinito* (formada por todos los puntos del infinito).

Ya vimos antes que dos rectas $\bar{l}_1$ y $\bar{l}_2$ que provienen de rectas afines secantes distintas l_1 y l_2 de Π se cortan en un punto de Π y, como l_1 y l_2 no son paralelas, sus direcciones son distintas, y también lo son sus puntos del infinito respectivos. Por ello $\bar{l}_1$ y $\bar{l}_2$ se cortan en un único punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, que es el punto de intersección de l_1 y l_2 en Π. También hemos visto que dos rectas $\bar{l}_1$ y $\bar{l}_2$ que provienen de rectas paralelas distintas l_1 y l_2 de Π, se cortan en su punto del infinito (y en ningún otro punto más, ya que l_1 y l_2 no se cortan en Π al ser paralelas). Por último una recta $\bar{l}$ comparte con la recta del infinito un único punto, el punto del infinito de $\bar{l}$. Estos argumentos demuestran el siguiente teorema:

Teorema 7.3. *Dos rectas distintas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ se cortan en un punto y solo uno.*

El teorema anterior tiene un enunciado "mejor", en el sentido de que es más simple y más "elegante" que el teorema afín análogo. El teorema afín sería: dos rectas distintas del plano afín se cortan en un punto (y solo uno) si no son paralelas y no se cortan si son paralelas. Como ves, tenemos que distinguir casos en el enunciado o, visto de otra forma, en el plano afín no todos los pares de rectas se comportan igual. La demostración que hemos hecho del teorema anterior sí distingue casos porque es una demostración que usa argumentos afines, es decir, no ha sido una demostración puramente proyectiva. Un poco más adelante, cuando definamos de forma precisa lo que es una recta proyectiva, haremos una demostración proyectiva, más elegante, de este resultado.

Otra "mejora" o simplificación que ofrece la geometría proyectiva con respecto a la geometría afín y euclídea es que estudiar las cónicas es más simple. En lo que queda de curso veremos que, desde un punto de vista proyectivo una elipse, una parábola o una hipérbola de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ corresponden a una misma cónica (dicho de otra forma, ser elipse, parábola o hipérbola son conceptos afines, no proyectivos). Igual que, de forma natural, a una recta de Π le hemos añadido un punto en el infinito, a las cónicas no degeneradas de Π (elipses, hipérbolas o parábolas) les añadiremos también sus puntos en el infinito, dando lugar a cónicas proyectivas que serán indistinguibles desde un punto de vista proyectivo (haciendo esto conseguiremos también que las ramas de una hipérbola se corten con sus asíntotas). Aún así, seremos capaces de usar la geometría proyectiva para decidir si una determinada cónica afín no degenerada es una elipse, una hipérbola o una parábola.

Definición de espacio proyectivo estándar

Una vez vista la definición de plano proyectivo estándar, es sencillo generalizarla a cualquier dimensión:

Definición 7.4. En $\mathbf{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$, definida así: $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \lambda(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. El espacio proyectivo estándar $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ es el conjunto cociente $\mathbf{k}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$. Denotaremos a la clase de equivalencia del vector $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ como $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$.

Igual que en el caso del plano, las clases de equivalencia de $\sim$ son las rectas vectoriales de $\mathbf{k}^{n+1}$ a las que se les ha quitado el origen. Por ello podemos identificar $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ con el conjunto de rectas vectoriales de $\mathbf{k}^{n+1}$.

Como en el caso plano, hay una forma natural de sumergir el espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ de dimensión n sobre $\mathbf{k}$ dentro de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$: Dentro de (el espacio vectorial) $\mathbf{k}^{n+1}$, con coordenadas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, identificamos $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ con el hiperplano afín de ecuación $x_0 = 1$, mediante la biyección

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1, x_1, \ldots, x_n).$$

De esta forma identificamos el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ con el punto $(1 : x_1 : \cdots : x_n)$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, por lo que “sumergimos” $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ mediante la aplicación inyectiva

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}} \\ i: & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (1 : x_1 : \cdots : x_n). \end{array} \tag{7.4.1}$$

Así $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ queda identificado con el subconjunto $\{(1 : x_1 : \cdots : x_n) \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{k}\}$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Según esta identificación, los puntos que hemos añadido a $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ para obtener $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ son los puntos del subconjunto

$$H_\infty = \{(0 : x_1 : \cdots : x_n) \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{k}\} \tag{7.4.2}$$

de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ (¿ves por qué? ¿qué pasa, por ejemplo, con un punto de la forma $(2 : x_1 : \cdots : x_n)$?). Los puntos de la forma $(0 : x_1 : \cdots : x_n)$ serán los *puntos del infinito* de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, aunque para ser precisos deberíamos decir que son los puntos del infinito de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ respecto a esta inmersión de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (iremos viendo esto en más detalle y nos daremos cuenta de que, en realidad, un espacio proyectivo *no* tiene puntos del infinito; el que “tiene” puntos del infinito es el espacio afín).

Llegados aquí es claro cómo hacer una construcción más general, más intrínseca:

Definición 7.5. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre un cuerpo $\mathbf{k}$. Definimos el *proyectivizado* $\mathbf{P}(V)$ de V como el conjunto cociente de $V \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia $\sim$, definida así: $v \sim w$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $w = \lambda v$. Los puntos de $\mathbf{P}(V)$ los denotaremos como $[v]$. Diremos que $\mathbf{P}(V)$ es un *espacio proyectivo de dimensión n*.

Ejemplo 7.6.
(1) Si $V = \mathbf{k}^{n+1}$, entonces $\mathbf{P}(V)$ es el espacio proyectivo estándar de dimensión n sobre $\mathbf{k}$, que habíamos denotado antes como $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$.
(2) En particular, el plano proyectivo estándar sobre $\mathbf{k}$ es $\mathbf{P}(\mathbf{k}^3)$ y la *recta proyectiva estándar* sobre $\mathbf{k}$ es $\mathbf{P}(\mathbf{k}^2)$.
(3) Si V es un espacio vectorial de dimensión 1, entonces $\mathbf{P}(V)$ está formado por un solo punto.

Dado un espacio afín A (no necesariamente $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$; recuerda la definición 1.1 de espacio afín "abstracto") de dimensión n, es posible sumergirlo en un espacio proyectivo de dimensión n, de forma parecida a como sumergimos $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ (véase la página 149 de "Geometry", de M. Audin o las páginas 35–36 de "Lecciones de Geometría Proyectiva", de J.M. Rodríguez Sanjurjo y J.M. Ruiz (sin embargo, estas inmersiones no son *canónicas*, en el sentido de que no son intrínsecas, al depender de una serie de elecciones)). En cualquier caso no nos preocuparemos de este tema ya que para familiarizarnos con la geometría proyectiva y para explorar su relación con la geometría afín nos basta usar la inmersión (no canónica), que hemos presentado en (7.4.1), del espacio afín estándar dentro del espacio proyectivo estándar, u otras similares (véase la observación 9.13). En cambio, sí es interesante usar el concepto de proyectivización de un espacio vectorial arbitrario porque, aunque trabajemos en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, vamos a estudiar sus subespacios proyectivos que, como veremos a continuación, son los proyectivizados de subespacios vectoriales de $\mathbf{k}^{n+1}$.

Subespacios proyectivos

Definición 7.7. Dado un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n, se llama *subespacio proyectivo o subespacio lineal* de $\mathbf{P}(V)$ de dimensión r a un subconjunto de la forma $\mathbf{P}(W)$, donde W es un subespacio vectorial de V dimensión $r+1$. A los subespacios proyectivos de dimensión 1 se les llama rectas proyectivas de $\mathbf{P}(V)$, a los de dimensión 2 se les llama planos proyectivos de $\mathbf{P}(V)$ y a los de dimensión $n-1$ se les llama hiperplanos proyectivos de $\mathbf{P}(V)$.

Observación 7.8. Por la definición anterior,
(1) los subespacios proyectivos de dimensión 0 son los puntos de $\mathbf{P}(V)$;
(2) el conjunto vacío *es* un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)$, ya que es el proyectivizado del subespacio vectorial nulo, y tiene dimensión -1.
(3) El conjunto H_∞ definido en (7.4.2) es un hiperplano proyectivo de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Lo llamaremos *hiperplano del infinito* (de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, sumergido en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ mediante la inmersión (7.4.1)). En el caso $n = 2$, H_∞ es una recta proyectiva, la *recta del infinito* (de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, sumergido en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ mediante la inmersión (7.4.1))

Proposición 7.9. *Sean Λ y Λ' dos subespacios proyectivos de un espacio proyectivo* $\mathbf{P}(V)$ *tales que $\Lambda \subseteq \Lambda'$. Entonces*
(1) $dim\Lambda \leq dim\Lambda'$.
(2) $dim\Lambda = dim\Lambda'$ *si y solo si* $\Lambda = \Lambda'$.

Demostración. Se sigue del enunciado correspondiente para subespacios vectoriales. □

Observación 7.10. Dados subespacios $\mathbf{P}(W_1), \dots, \mathbf{P}(W_s)$ de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$, se pueden hacer las siguientes operaciones:
(1) La intersección de todos ellos, que coincide con los puntos $[v]$ tales que v está en cada W_i. Por tanto, se tiene que $\mathbf{P}(W_1) \cap \cdots \cap \mathbf{P}(W_s) = \mathbf{P}(W_1 \cap \cdots \cap W_s)$, que es un subespacio proyectivo (recuerda que el vacío también es un subespacio proyectivo).

En general, la intersección de una colección arbitraria, no necesariamente finita, de subespacios proyectivos es otro subespacio proyectivo, ya que la intersección arbitaria de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

(2) El mínimo subespacio proyectivo $\mathbf{P}(W)$ que los contiene (la definición de subespacio proyectivo mínimo o más pequeño es análoga a la dada para subespacios afines en la proposición 2.10). En este caso es claro que W ha de ser el mínimo subespacio vectorial que contiene a $W_1, \dots, W_s$, es decir, $W = W_1 + \cdots + W_s$.

Definición–Proposición 7.11. Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo.

(1) Se llama subespacio generado por los subespacios $\mathbf{P}(W_1), \dots, \mathbf{P}(W_s)$ de $\mathbf{P}(V)$ y lo denotaremos por $< \mathbf{P}(W_1), \dots, \mathbf{P}(W_s) >$, al mínimo subespacio proyectivo que los contiene. Como hemos visto en la observación anterior, $< \mathbf{P}(W_1), \dots, \mathbf{P}(W_s) >= \mathbf{P}(W_1 + \cdots + W_s)$.

(2) Dado un subconjunto S de $\mathbf{P}(V)$, se llama subespacio generado por S y lo denotamos por $< S >$ al mínimo subespacio proyectivo que contiene a S. El subespacio $< S >$ es la intersección de todos los subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(V)$ que contienen a S.

Definición 7.12. *(puntos proyectivamente independientes)* Decimos que $k+1$ puntos $p_0, p_1, \dots, p_k$ de $\mathbf{P}(V)$ son puntos proyectivamente independientes si el subespacio proyectivo $< p_0, p_1, \dots, p_k >$ que generan tiene dimensión k.

Proposición 7.13. *Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n.*

(1) *Los puntos $p_0 = [v_0], p_1 = [v_1], \dots, p_k = [v_k]$ de $\mathbf{P}(V)$ son proyectivamente independientes si y solo si los vectores $v_0, v_1, \dots, v_k$ de V son linealmente independientes.*

(2) *Dado un número natural k, existen k puntos proyectivamente independientes en $\mathbf{P}(V)$ si y solo si $1 \leq k \leq n+1$.*

Demostración. Ejercicio. □

Como consecuencia de la fórmula de Grassmann para subespacios vectoriales, tenemos la fórmula de Grassmann para subespacios proyectivos:

Proposición 7.14. *(fórmula de Grassmann) Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo y sean $\mathbf{P}(W_1)$ y $\mathbf{P}(W_2)$ dos subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(V)$. Entonces*

$$\dim < \mathbf{P}(W_1), \mathbf{P}(W_2) >= \dim \mathbf{P}(W_1) + \dim \mathbf{P}(W_2) - \dim (\mathbf{P}(W_1) \cap \mathbf{P}(W_2)).$$

Demostración. Recordemos la fórmula de Grassmann vectorial

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

y que $< \mathbf{P}(W_1), \mathbf{P}(W_2) >= \mathbf{P}(W_1 + W_2)$. Entonces

$$\dim < \mathbf{P}(W_1), \mathbf{P}(W_2) >= \dim \mathbf{P}(W_1 + W_2) = \dim(W_1 + W_2) - 1 = (\dim W_1 - 1) + (\dim W_2 - 1) - (\dim(W_1 \cap W_2) - 1) = \dim \mathbf{P}(W_1) + \dim \mathbf{P}(W_2) - \dim(\mathbf{P}(W_1) \cap \mathbf{P}(W_2)).$$

□

Observación 7.15. La fórmula de Grassmann es otro ejemplo de que los resultados proyectivos son más sencillos y elegantes de enunciar que los resultados afines. En efecto, la versión afín de la fórmula de Grassmann dice lo siguiente:

Sea (A, V, φ) un espacio afín y sean $L_1 = p_1 + W_1$ y $L_2 = p_2 + W_2$ subespacios afines de A (donde $p_1, p_2 \in A$ y W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V). Entonces

(1) *si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$,* $\dim < L_1, L_2 >= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$, *y*

(2) *si* $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, $\dim < L_1, L_2 >= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + 1$.

Como se ve, en el enunciado afín debemos distinguir casos. Puedes consultar la demostración de la versión afín de la fórmula de Grassmann en la proposición IX.4.4 de "Álgebra Lineal y Geometría", de M. Castellet e I. Llerena o en la proposición 1.20 de "Geometría", de S. Xambó. También puedes deducir, como ejercicio, la versión afín de la fórmula de Grassmann a partir de la versión proyectiva.

Corolario 7.16. *Sean Λ y Λ' dos subespacios proyectivos de dimensiones respectivas r y r' en un espacio proyectivo de dimensión n. Entonces, si $r + r' \geq n$, la intersección de Λ y Λ' tiene dimensión al menos $r + r' - n$ (que es mayor o igual que 0), por lo que no es vacía. En particular dos rectas de un plano proyectivo siempre se cortan.*

Demostración. Por la fórmula de Grassmann, $\dim(\Lambda \cap \Lambda') = r + r' - \dim < \Lambda, \Lambda' >$. Como la dimensión de $< \Lambda, \Lambda' >$ es menor o igual que n, el resultado se sigue inmediatamente. $\square$

Ecuaciones paramétricas e implícitas

Para hacer cálculos (encontrar la intersección, hallar el subespacio generado...) con subespacios proyectivos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, podemos dar *ecuaciones implícitas* y *parametrizaciones* de los mismos. En cuanto a las ecuaciones implícitas observamos primero que dar las ecuaciones implícitas de un subespacio W de $\mathbf{k}^{n+1}$ es expresar W como el conjunto de soluciones de un sistema *homogéneo* de ecuaciones lineales. Recordemos que un polinomio F en las variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se dice homogéneo si cada término $cx_0^{k_0}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ $(c \in \mathbf{k}^*)$ de F tiene el mismo grado total $k_0+k_1+\cdots+k_n$. Por ejemplo $X^2Y-2XY^2+3Y^3$ es homogéneo pero X^2Y-2XY^2+3Y no lo es. No tiene sentido evaluar un polinomio homogéneo (lineal o de grado mayor) en un punto p de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ puesto que en principio va a tomar valores diferentes en cada representante de p. Sin embargo, si el polinomio homogéneo se anula en un representante v de p, *se anula en todos* los representantes de p (porque estos son múltiplos no nulos de v). Por ello, sí tiene sentido hablar de los *ceros* o *soluciones* en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de un polinomio *homogéneo* en $n+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Por la misma razón tiene sentido hablar de las soluciones en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales en $n+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (los polinomios que aparecen en un sistema homogéneo de ecuaciones lineales son polinomios homogéneos de grado 1). En definitiva, podemos decir que las ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial W de $\mathbf{k}^{n+1}$ son las *ecuaciones implícitas* de $\mathbf{P}(W)$, ya que el conjunto de las soluciones en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de esas ecuaciones implícitas es justamente $\mathbf{P}(W)$. En efecto, si v es un representante de un punto p, v es una solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo si y solo si cualquier otro representante w de p lo es. Por otra parte, es claro que el conjunto de soluciones en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de cualquier sistema de ecuaciones lineales homogéneo en $n+1$ variables es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$.

Por otra parte y argumentando de manera parecida, unas ecuaciones *paramétricas* de W nos proporcionan una *parametrización* de $\mathbf{P}(W)$. Si $\mathbf{P}(W)$ tiene dimensión r, una parametrización de $\mathbf{P}(W)$ se puede ver como una aplicación biyectiva de $\mathbf{P}^r_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}(W)$ con ciertas características, como veremos más adelante (será lo que llamaremos una *aplicación proyectiva* biyectiva o una *proyectividad* de $\mathbf{P}^r_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}(W)$).

Compleción de subespacios afines

Queremos ahora generalizar la construcción, que hicimos en la introducción de este tema, por la cual completábamos una recta afín l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ para obtener una recta proyectiva $\bar{l}$ en el plano proyectivo $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Dijimos entonces que obteníamos $\bar{l}$ sumergiendo l en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ mediante la inmersión i de (7.4.1) y añadiendo a $i(l)$ el *punto del infinito* de l. Si la dirección de l era $L(v)$ ("viendo" l como una recta del plano afín de ecuación $x_0 = 1$ en $\mathbf{k}^3$), este punto del infinito no era sino $[v]$. Vamos a imitar esto para un subespacio afín arbitrario de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$:

Definición–Proposición 7.17. Sea L un subespacio afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, sea W la dirección de L, sea W' la imagen de W en $\mathbf{k}^{n+1}$ por la inmersión

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}^n & \longrightarrow & \mathbf{k}^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (0, x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

y sea i la inmersión de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ definida en (7.4.1). El subconjunto $\overline{L} = i(L) \cup \mathbf{P}(W')$ es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Además, si

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{7.17.1}$$

son unas ecuaciones implícitas de L, entonces

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.17.2}$$

son unas ecuaciones implícitas de $\overline{L}$. A $\overline{L}$ le llamamos el *completado proyectivo* de L. Al proceso de pasar de (7.17.1) a (7.17.2) lo llamamos *homogeneizar*.

Demostración. Observamos que las soluciones $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ con $x_0 \neq 0$ del sistema (7.17.2) son el conjunto $i(L)$. Por otra parte, como W es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

las soluciones $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ con $x_0 = 0$ del sistema (7.17.2) son el conjunto $\mathbf{P}(W')$. Por tanto $\overline{L}$ es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y (7.17.2) son unas ecuaciones implícitas suyas. □

Observación 7.18. El hecho de que $\overline{L} = i(L) \cup \mathbf{P}(W')$ podemos interpretarlo como que, para pasar de L a su completado proyectivo, lo que hacemos es añadir los puntos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ que corresponden a las direcciones de todas las rectas de L.

Otro resultado, que geométricamente parece intuitivo pero cuya demostración no es inmediata, es el que formulamos en el siguiente ejercicio teórico de cierta dificultad:

Ejercicio 7.19. Sea L un subespacio afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y sea $\widetilde{W}$ el subespacio vectorial de $\mathbf{k}^{n+1}$ generado por L. Demuestra que $\overline{L} = \mathbf{P}(\widetilde{W})$.